

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

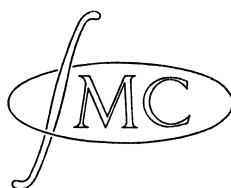
AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 30

Berekening van drie waarschijnlijkheidsintegralen

door

J.F. Frankena



Mei 1963

1. Inleiding.

In deze notitie wordt een berekening gegeven van het nulde moment en de eerste momenten van een verdelingsfunctie, n.l.

$$(1.1) \quad I_1(\alpha, \beta, \gamma, \vartheta) = \iint_G x \exp - f(x, y) \, dx \, dy,$$

$$(1.2) \quad I_2(\alpha, \beta, \gamma, \vartheta) = \iint_G y \exp - f(x, y) \, dx \, dy,$$

$$(1.3) \quad I_3(\alpha, \beta, \gamma, \vartheta) = \iint_G \exp - f(x, y) \, dx \, dy.$$

Hierin is G de sector

$$(1.4) \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi \leq \vartheta$$

en $f(x, y)$ de positief definitie kwadratische vorm

$$(1.5) \quad f(x, y) = \alpha x^2 - 2\beta xy + \gamma y^2$$

met

$$D \equiv \alpha\gamma - \beta^2 > 0.$$

Overgang op poolcoördinaten levert in elk der drie gevallen betrekkelijk eenvoudig integreerbare functies. De berekeningen zijn uitgevoerd voor het halfvlak $0 < \vartheta \leq \pi$, met als resultaten

$$(1.6) \quad I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \frac{\gamma - \beta \cotg \vartheta}{(\alpha \cotg^2 \vartheta - 2\beta \cotg \vartheta + \gamma)^{1/2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \right\},$$

$$(1.7) \quad I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \frac{\beta - \alpha \cotg \vartheta}{(\alpha \cotg^2 \vartheta - 2\beta \cotg \vartheta + \gamma)^{1/2}} + \sqrt{\alpha} \right\},$$

$$(1.8) \quad I_3 = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\alpha \cotg \vartheta - \beta}{\sqrt{D}} \right\}.$$

Voor het geval dat $\pi < \vartheta \leq 2\pi$ gebruikt men de relaties

$$(1.9) \quad I_{1,2}(\vartheta) = I_{1,2}(\pi) - I_{1,2}(\vartheta - \pi),$$

en

$$(1.10) \quad I_3(\vartheta) = I_3(\pi) + I_3(\vartheta - \pi).$$

De integraal I_2 kan men rechtstreeks berekenen of, wat aanzienlijk korter is, uit I_1 afleiden via de betrekkingen

$$(1.11) \quad I_2(\vartheta) = I_1^*\left(\frac{\pi}{2}\right) - I_1^*\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$$

en

$$(1.12) \quad I_1(\alpha, \beta, \gamma, -\vartheta) = -I_1(\alpha, -\beta, \gamma, \vartheta), \text{ indien } \vartheta > \frac{\pi}{2}.$$

De betrekkingen (1.9) t/m (1.12) worden alle in § 2 afgeleid. De speciale gevallen $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ en $\vartheta = \pi$ hebben praktische betekenis. Substitutie in (1.6) t/m (1.8) geeft de resultaten

<u>$\vartheta = \frac{\pi}{2}$</u>	<u>$\vartheta = \pi$</u>
$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \sqrt{\gamma} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \right\},$	$I_1 = \frac{\beta}{2D} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$
$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} \right\},$	$I_2 = \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{2D},$
$I_3 = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\sqrt{D}} \right\}.$	$I_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{D}}.$

N.B. De integralen I_1 , I_2 , en I_3 zijn functies der vier parameters α, β, γ en ϑ . Slechts waar nodig zijn een of meer van deze parameters genoteerd.

2. Enige relaties voor I_1 , I_2 en I_3 .

De relaties (1.9) t/m (1.12) kunnen direct uit de gegeven integraalvormen (1.1) t/m (1.3) worden afgeleid, indien men hierin poolcoördinaten als nieuwe variabelen gekozen denkt. Het geval $\pi < \vartheta \leq 2\pi$ wordt als volgt teruggebracht tot $0 < \vartheta \leq \pi$.

$$\begin{aligned} I_{1,2}(\vartheta) &= \int_0^{\vartheta} \int_0^{\infty} r^2 \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \exp - r^2 (\alpha \cos^2 \varphi - 2\beta \cos \varphi \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi) dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \dots + \int_{\pi}^{\vartheta} \int_0^{\infty} \dots = I_{1,2}(\pi) + \int_{\pi}^{\vartheta} \int_0^{\infty} \dots = \\ &= I_{1,2}(\pi) - \int_0^{\vartheta-\pi} \int_0^{\infty} r^2 \frac{\cos \eta}{\sin \eta} \exp - r^2 (\alpha \cos^2 \eta - 2\beta \cos \eta \sin \eta + \\ &\quad + \gamma \sin^2 \eta) dr d\eta = \end{aligned}$$

$$(2.1) \quad = I_{1,2}(\pi) - I_{1,2}(\vartheta - \pi),$$

d.i. formule (1.9).

Voor I_3 geldt analoog

$$\begin{aligned} I_3(\vartheta) &= \int_0^{\vartheta} \int_0^{\infty} r \exp - r^2 (\alpha \cos^2 \varphi - 2\beta \cos \varphi \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi) dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \dots + \int_{\pi}^{\vartheta} \int_0^{\infty} \dots = I_3(\pi) + \int_{\pi}^{\vartheta} \int_0^{\infty} \dots = \\ &= I_3(\pi) + \int_0^{\vartheta-\pi} \int_0^{\infty} r \exp - r^2 (\alpha \cos^2 \eta - 2\beta \cos \eta \sin \eta + \gamma \sin^2 \eta) dr d\eta = \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad = I_3(\pi) + I_3(\vartheta - \pi),$$

d.i. formule (1.10).

De relatie (1.11) tussen I_1 en I_2 volgt uit

$$I_2 = \int_0^{\vartheta} \int_0^{\infty} r^2 \sin \varphi \exp - r^2 (\alpha \cos^2 \varphi - 2\beta \cos \varphi \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi) dr d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\vartheta} \int_0^{\infty} r^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \exp(-r^2(\alpha \sin^2(\frac{\pi}{2} - \varphi) - 2\beta \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) \\
 &\quad \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + \gamma \cos^2(\frac{\pi}{2} - \varphi))) \, dr \, d\varphi = \\
 &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \vartheta} \int_0^{\infty} r^2 \cos \psi \exp(-r^2(\alpha \sin^2 \psi - 2\beta \sin \psi \cos \psi + \gamma \cos^2 \psi)) \, dr \, d\psi = \\
 (2.3) \quad &= I_1^*(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\pi}{2}) - I_1^*(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\pi}{2} + \vartheta),
 \end{aligned}$$

waarbij I_1^* uit I_1 ontstaat door α en γ te verwisselen.

De betrekking (1.12) wordt a.v. bewezen

$$\begin{aligned}
 I_1(-\vartheta) &= \int_0^{-\vartheta} \int_0^{\infty} r^2 \cos \varphi \exp(-r^2(\alpha \cos^2 \varphi - 2\beta \cos \varphi \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi)) \, dr \, d\varphi = \\
 &= - \int_0^{\vartheta} \int_0^{\infty} r^2 \cos \psi \exp(-r^2(\alpha \cos^2 \psi + 2\beta \cos \psi \sin \psi + \gamma \sin^2 \psi)) \, dr \, d\psi = \\
 (2.4) \quad &= - I_1(\alpha, -\beta, \gamma, \vartheta).
 \end{aligned}$$

Evenzo geldt voor I_2 de relatie

$$(2.5) \quad I_2(\alpha, \beta, \gamma, -\vartheta) = I_2(\alpha, -\beta, \gamma, \vartheta),$$

hetgeen men op analoge manier bewijst.

Tenslotte vindt men voor I_3

$$I_3(\alpha, \beta, \gamma, -\vartheta) = - I_3(\alpha, -\beta, \gamma, \vartheta).$$

3. Berekening van I_1

Door overgang op poolcoördinaten

$$(3.1) \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

krijgt $f(x,y)$ de gedaante

$$(3.2) \quad r^2 g(\varphi) \equiv r^2 (\alpha \cos^2 \varphi - 2\beta \cos \varphi \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi)$$

en wordt I_1

$$(3.3) \quad I_1 = \int_0^{\vartheta} \int_0^{\infty} r^2 \cos \varphi \exp(-r^2 g(\varphi)) dr d\varphi.$$

De dubbele integraal in (3.3) vatten we op als een herhaalde integraal waarbij we eerst de integratie naar r , en vervolgens die naar φ uitgevoerd denken. I_1 wordt aldus

$$(3.4) \quad I_1 = \int_0^{\vartheta} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\infty} r^2 \exp(-r^2 g(\varphi)) dr.$$

De laatste integratie is gemakkelijk uitvoerbaar indien we gebruik maken van de substitutie

$$r^2 g(\varphi) = v,$$

$$(3.5) \quad \int_0^{\vartheta} g^{-\frac{3}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\infty} v^2 e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^{\vartheta} g^{-\frac{3}{2}} \cos \varphi d\varphi.$$

In de laatste integraal kunnen we $\cotg \varphi$ als nieuwe variabele kiezen.

Daartoe schrijven we $g^{-\frac{3}{2}}$ in de vorm

$$(3.6) \quad g^{-\frac{3}{2}}(\varphi) = \sin^{-3} \varphi (\alpha \cotg^2 \varphi - 2\beta \cotg \varphi + \gamma)^{-\frac{3}{2}},$$

waarbij we $0 < \vartheta \leq \pi$ nemen.

(3.5) wordt nu

$$(3.7) \quad I_1 = - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_{-\infty}^{-\cot g \vartheta} (\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma)^{-\frac{3}{2}} t dt.$$

We kiezen in deze integraal $v = \alpha t + \beta$ als nieuwe variabele, waardoor (3.7) overgaat in de vorm

$$(3.8) \quad I_1 = - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left\{ \int_{-\infty}^{\beta - \alpha \cot g \vartheta} \frac{v dv}{(v^2 + D)^{3/2}} - \beta \int_{-\infty}^{\beta - \alpha \cot g \vartheta} \frac{dv}{(v^2 + D)^{3/2}} \right\}.$$

De eerste integraal is elementair uitvoerbaar; de tweede vatten we op als een afgeleide naar de parameter γ , zodat

$$(3.9) \quad \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left\{ \alpha (\alpha \cot g^2 \vartheta - 2\beta \cot g \vartheta + \gamma) \right\}^{-\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\beta - \alpha \cot g \vartheta} \frac{dv}{(v^2 + D)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left\{ \alpha (\alpha \cot g^2 \vartheta - 2\beta \cot g \vartheta + \gamma) \right\}^{-\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln(v + \sqrt{v^2 + D}) \Big|_{-\infty}^{\beta - \alpha \cot g \vartheta}. \end{aligned}$$

Uitvoering der integratie en invullen der grenzen geeft tenslotte

$$(3.10) \quad \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left\{ \alpha (\alpha \cot g^2 \vartheta - 2\beta \cot g \vartheta + \gamma) \right\}^{-\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \frac{\beta}{4D} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left\{ 1 + (\beta - \alpha \cot g \vartheta) \right\} \left\{ \alpha (\alpha \cot g^2 \vartheta - 2\beta \cot g \vartheta + \gamma) \right\}^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

waaruit na enig rekenwerk gemakkelijk volgt

$$(3.11) \quad I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \frac{\gamma - \beta \cotg \vartheta}{(\alpha \cotg^2 \vartheta - 2\beta \cotg \vartheta + \gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \right\}.$$

4. Berekening van I_2

Men kan voor I_2 de formule (1.2) afleiden op de manier waarop dat met I_1 is gebeurd. Gebruikmakend van de relaties, afgeleid in § 2 komt men echter sneller tot het resultaat. We gebruiken dus

$$I_2(\vartheta) = I_1^*\left(\frac{\pi}{2}\right) - I_1^*\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right).$$

Nu is

$$(4.1) \quad \begin{aligned} I_1^*\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \frac{\alpha - \beta \cotg \frac{\pi}{2}}{(\gamma \cotg^2 \frac{\pi}{2} - 2\beta \cotg \frac{\pi}{2} + \alpha)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} \right\}; \end{aligned}$$

en

$$(4.2) \quad \begin{aligned} I_1^*\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \frac{\alpha - \beta \cotg(\frac{\pi}{2} - \vartheta)}{(\gamma \cotg^2(\frac{\pi}{2} - \vartheta) - 2\beta \cotg(\frac{\pi}{2} - \vartheta) + \alpha)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \frac{\alpha - \beta \tg \vartheta}{(\gamma \tg^2 \vartheta - 2\beta \tg \vartheta + \alpha)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \frac{\beta - \alpha \cotg \vartheta}{(\alpha \cotg^2 \vartheta - 2\beta \cotg \vartheta + \gamma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} \right\}. \end{aligned}$$

Dus is

$$(4.3) \quad I_2(\vartheta) = I_1^*\left(\frac{\pi}{2}\right) - I_1^*\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \frac{\beta - \alpha \cotg \vartheta}{(\alpha \cotg^2 \vartheta - 2\beta \cotg \vartheta + \gamma)^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{\alpha} \right\}.$$

5. Berekening van I_3

De derde integraal

$$I_3 = \iint_G \exp - f(x,y) \, dx \, dy$$

gaat door transformatie naar poolcoördinaten over in

$$(5.1) \quad \int_0^{\vartheta} \int_0^{\infty} r \exp - r^2 g(\varphi) \, dr \, d\varphi ,$$

waarbij $g(\varphi)$ weer door (3.2) gegeven is. De dubbele integraal (5.1) wordt opgevat als een herhaalde integraal. Door de substitutie $r^2 g = v^2$ wordt de integratie naar r elementair. Men verkrijgt dan de enkelvoudige integraal

$$(5.2) \quad I_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} g^{-1}(\varphi) d\varphi .$$

Uit $g(\varphi)$ splitsen we weer de factor $\sin^2 \varphi$ af en we kiezen $\cotg \varphi$ als nieuwe variabele.

$$(5.3) \quad \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} g^{-1}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\cotg \vartheta}^{\infty} (\alpha u^2 - 2\beta u + \gamma)^{-1} du .$$

In de laatste integraal wordt $v = \alpha u - \beta$ als variabele ingevoerd, zodat

$$(5.4) \quad I_3 = \frac{1}{2} \int_{\alpha \cotg \vartheta - \beta}^{\infty} \frac{dv}{v^2 + D} = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \arctg \infty - \arctg \frac{\alpha \cotg \vartheta - \beta}{\sqrt{D}} \right\} .$$

Nu is $\arctg \infty = \frac{\pi}{2}$, dus

$$(5.5) \quad I_3 = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\alpha \cotg \vartheta - \beta}{\sqrt{D}} \right\} .$$

Deze vorm geldt voor $0 < \vartheta \leq \pi$, voor $\vartheta > \pi$ of $\vartheta < 0$ zij verwezen naar § 2.